UNA PROPUESTA PARA LA INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA DESDE LA VARIACIÓN. ANÁLISIS DE RESULTADOS.

Silvia Vrancken, Adriana Engler, Daniela Müller
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral - Argentina
Kreder 2805 - (3080) Esperanza - Santa Fe - Argentina
svrancke@fca.unl.edu.ar; aengler@fca.unl.edu.ar; dmuller@fca.unl.edu.ar
Nivel: Medio - Terciario - Universitario ciclo Básico
Palabras claves: variación, derivada, errores, dificultades

Resumen
Los cambios que ocurren en nuestra vida cotidiana y en distintas ramas de la ciencia, tienen comportamientos diversos. El cálculo diferencial y, en particular, el estudio del comportamiento variacional de las funciones, resulta fundamental para analizar estos fenómenos.
El aprendizaje del cálculo constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, no sólo por su importancia, sino por las numerosas dificultades que trae aparejado, relacionadas con un pensamiento de orden superior. Intentando comprender las ejecuciones de nuestros alumnos ante las tareas propuestas y las razones por las que su pensamiento opera como lo hace, llevamos a cabo estudios que comprenden el análisis de los errores y dificultades en el aprendizaje de contenidos básicos del cálculo. Comenzamos, además, a diseñar, poner en práctica y evaluar secuencias didácticas que prioricen el tratamiento de los errores que nos permitan detectar dificultades en la formación de conceptos y realimentar el proceso de aprendizaje.
En este trabajo presentamos algunas actividades de una secuencia que preparamos con el propósito de facilitar la construcción del concepto de derivada. Asumimos que el tratamiento y conversión entre los diferentes registros en que puede ser presentado (numérico, coloquial, geométrico, algebraico) y el desarrollo de ideas variacionales, como la noción de razón de cambio, puede contribuir a este propósito. La propuesta se llevó al aula con alumnos cursantes de Matemática II de la carrera Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional del Litoral. Analizamos los errores y las dificultades que tuvieron en la resolución de las distintas actividades.

Introducción

El cálculo es la rama de la matemática a la que se dedica mayor tiempo en los currículos iniciales de distintas carreras universitarias, ya sea en las áreas de ciencias exactas y tecnológicas, como biológicas, sociales y de humanidades. En nuestra carrera, Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral, se desarrollan los principios fundamentales del cálculo durante el dictado de la asignatura Matemática II. Como futuros ingenieros, los alumnos deben recibir el conocimiento matemático adecuado que les permita identificar, interpretar, modelar y resolver situaciones diversas relacionadas con su ejercicio profesional.

Los cambios que ocurren en la sociedad, economía, naturaleza, en nuestra vida cotidiana, tienen distintos comportamientos. En matemática se crean modelos abstractos para describir dichos fenómenos y la medición del cambio de esos fenómenos es un aspecto esencial de la variación y el elemento eje en la formación del concepto de derivada. En este sentido, el cálculo diferencial, especialmente el estudio del comportamiento variacional de las funciones, resulta fundamental para analizar los cambios que ocurren en los fenómenos y, en consecuencia, para formular dichos modelos.

El aprendizaje del cálculo y, en particular, la conceptualización de la noción de derivada, constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, ya que trae aparejado numerosas dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior. Artigue (1995) expresa que si bien muchos estudiantes pueden aprender a realizar de forma mecánica cálculos de derivadas, primitivas y resolver algunos problemas, se encuentran grandes dificultades para alcanzar una verdadera comprensión de los conceptos involucrados y un desarrollo adecuado de métodos de pensamiento que son el centro de este campo de la matemática.

Un fenómeno educativo de la matemática es el predominio de métodos algebraicos y algorítmicos. Cantoral y Mirón (2000) señalan que esto provoca que una gran cantidad de alumnos no logren dar sentido y significado a los conceptos básicos, de modo que, aún siendo capaces de derivar una función, no pueden reconocer en cierto problema la necesidad de una derivación.

Ante la constatación de la tendencia en la enseñanza de dedicar una gran parte de las actividades al aprendizaje de reglas de cálculo, sin basarse en la comprensión de los conceptos, Azcárate, Bosch, Casadevall y Casellas (1997) resaltan la importancia del uso de representaciones diversas, como pueden ser la gráfica, la numérica y la algebraica, de manera de lograr relacionarlas y pasar de una a otra a fin de alcanzar representaciones mentales ricas que reflejen muchos aspectos relacionados con el concepto.

En general, las tareas de conversión entre diferentes sistemas de representación son minimizadas en la enseñanza y eso produce limitaciones en la comprensión. Duval (1998) expresa que el uso de distintas representaciones es esencial en el desarrollo del pensamiento y en la producción de conocimiento. Distintos autores apoyan esta idea y manifiestan que llegar a comprender un concepto matemático implica realizar procesos de conversión entre diferentes registros de representación, manifestados por la posibilidad de movilización y de articulación entre los mismos (Rico, 2000, D´Amore, 2002).

Para poder entender el proceso de construcción de los conceptos y procesos matemáticos es necesario analizar las ejecuciones de los alumnos ante las tareas propuestas y las razones por las que su pensamiento matemático opera como lo hace, aún en el caso de que sus respuestas o producciones no correspondan con nuestro conocimiento. En este sentido, en el marco del proyecto de investigación "Errores y dificultades: organizadores didácticos en el aprendizaje del cálculo en carreras no matemáticas", en el que estamos trabajando desde el año 2005, llevamos a cabo estudios que comprenden el análisis de los errores y dificultades en el aprendizaje de los contenidos básicos del cálculo. Comenzamos, además, a diseñar, poner en práctica y evaluar secuencias didácticas articuladas en torno a diferentes organizadores que prioricen el tratamiento de los errores para detectar dificultades en la formación de conceptos y realimentar el proceso de aprendizaje (Engler, Vrancken y Müller, 2003a, 2003b).

En este trabajo presentamos algunas actividades de una secuencia didáctica que preparamos con el propósito de facilitar la construcción del concepto de derivada. Asumimos que el tratamiento y conversión entre los diferentes registros en que este concepto puede ser presentado (numérico, coloquial, geométrico, algebraico) y el desarrollo de ideas variacionales, como la noción de razón de cambio, pueden contribuir a este propósito. Analizamos los errores y las dificultades que presentaron los alumnos en la resolución de las actividades como una manera de explorar sus concepciones sobre el concepto de velocidad promedio e instantánea así como los problemas en el tratamiento de las funciones y la conversión entre distintos registros.

Desarrollo de la propuesta

Elaboramos una secuencia didáctica cuyas actividades pretenden desarrollar habilidades relacionadas con las variables, las funciones y la variación. Para su diseño se tuvo en cuenta las ideas desarrolladas por Dolores (1999, 2007) y Azcárate y cols. (1997), además de las dificultades y errores observados en trabajos nuestros de años anteriores. La propuesta se basa en una introducción intuitiva e informal al cálculo diferencial. Con la resolución de los problemas se busca desarrollar ideas variacionales que lleven a la comprensión de los conceptos fundamentales. Al respecto, Dolores (2007, p. 198) expresa:

> Ubicar como eje rector de todo el curso de Cálculo Diferencial al estudio de la variación, de modo que la derivada no sea un concepto matemático abstracto sino un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica.

Azcárate y cols. (1997) señalan la necesidad de partir de las concepciones previas que tienen los alumnos acerca de la velocidad, utilizar las representaciones gráficas de las funciones para visualizar ideas, en especial la de razón de cambio media como pendiente de una recta.

Las actividades se presentan en registros diferentes (coloquial, algebraico, gráfico, numérico) y requieren las conversiones entre los mismos. Las tablas, gráficas, expresiones en lenguaje coloquial y representaciones algebraicas, que contienen la misma información ponen en juego diferentes procesos cognitivos, relacionados entre sí. Como expresa Carabús (2002), las tablas contemplan los aspectos numéricos y cuantitativos, las representaciones gráficas potencian las posibilidades de la visualización, las expresiones algebraicas se relacionan con la capacidad simbólica, el lenguaje coloquial se vincula con la capacidad lingüística y es importante para interpretar y relacionar todas las representaciones.

Dividimos la secuencia en dos partes. El primer bloque de actividades demanda el manejo de los conceptos de variable, función y variación de cada una de las variables involucradas. Su resolución requiere de habilidades como representar variables, evaluar y graficar funciones, cuantificar cambios por medios numéricos, geométricos o analíticos y analizar el comportamiento de esos cambios. En la segunda parte aparecen las razones de cambio y se interpretan geométricamente. Su resolución requiere habilidades para calcular cambios relativos (velocidad media y velocidad instantánea), interpretar la velocidad promedio como la pendiente de la recta secante y la velocidad instantánea como la pendiente de la recta tangente.

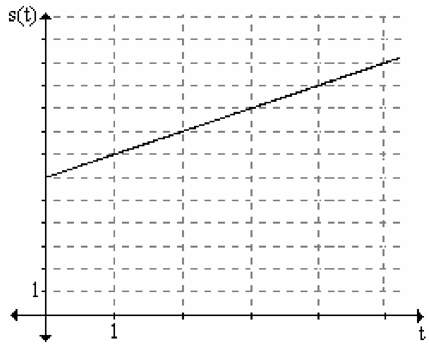
La propuesta se llevó al aula con alumnos cursantes de Matemática II en la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral agrupados de a dos. El abordaje de los problemas fue la actividad principal realizada en el aula. Los alumnos resolvieron las actividades prácticamente sin intervención del docente a cargo de la clase.

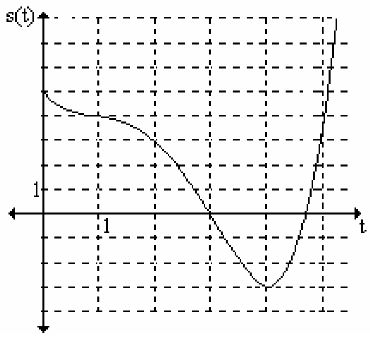
Los dos bloques de actividades se implementaron en dos clases sucesivas. En la primer clase el profesor hizo una introducción sobre el tema que empezaba a desarrollar y su importancia y explicó la forma de trabajo. Luego los alumnos resolvieron las actividades. En la segunda clase, se discutieron brevemente en primera instancia las actividades de la clase anterior, tratando de dejar en claro cómo se calculan los cambios, la importancia de respetar el orden de los términos de la diferencia (resolviendo estado final menos estado inicial), el significado de

los cambios y la interpretación de su signo. Luego los alumnos resolvieron las actividades del segundo bloque. En una tercera clase, se pusieron en común los resultados de las actividades de la clase anterior y a partir de los mismos el profesor definió razón de cambio media, razón de cambio instantánea, relacionó dichos conceptos con su interpretación geométrica y definió derivada.
A continuación enunciamos tres de las actividades propuestas. Una correspondiente a la primera parte de la secuencia y dos de la segunda, algunos comentarios sobre su resolución y un análisis de las respuestas de los alumnos.

Presentación de las actividades y análisis de los resultados

Actividad. Las gráficas muestran el espacio recorrido s(t) por dos partículas respecto del tiempo demorado en recorrerlo. Para cada una complete una tabla como la que sigue.





Intervalos	Δs
$0 \leq t \leq 1$	
$1 \leq t \leq 2$	
$2 \leq t \leq 3$	
$3 \leq t \leq 4$	
$4 \leq t \leq 5$	

¿Cómo se comportan en cada caso los cambios Δs? ¿En qué intervalos los cambios fueron más rápidos?

En esta actividad se presentan dos funciones definidas gráficamente y se solicita a los alumnos la medición de los cambios de la variable dependiente y el análisis del comportamiento de estos cambios. Con respecto a los registros, el alumno debe elaborar la traducción del registro gráfico al numérico e interpretar lo realizado en el registro coloquial, lo que le exige relacionar las diferentes representaciones.
De setenta y cuatro trabajos que se analizaron, aproximadamente en el 80% la primer tabla estaba completa de manera correcta. De los trabajos en los que la tabla estaba incorrecta (quince), observamos que la tercera parte escribe $\Delta s = 1$, lo que muestra que confunden la variable independiente con la variable dependiente. Se detectaron más dificultades en la segunda tabla, la que fue completada de manera correcta por el 61% de los grupos aproximadamente. Observamos en dieciocho trabajos (24,3%) que los alumnos escriben los cambios pero positivos, sin los signos, y en seis trabajos escriben negativo sólo el cambio que corresponde al intervalo en que la función es negativa. Esto nota que no reconocen la importancia en el orden de su cálculo (valor final menos valor inicial) por lo que no distinguen las diferencias entre variaciones positivas y negativas. En el segundo caso confunden además el signo de los cambios con el signo de la función.
En relación a la pregunta sobre cómo se comportan los cambios, no se observaron muchas dificultades. En algunos casos se detecta que intentan relacionar los cambios de la función con su crecimiento pero confunden los conceptos o no pueden explicarlo correctamente, por lo que sus respuestas resultan incorrectas. Algunos grupos escribieron : "Los cambios crecen en el primero, en el segundo crecen o decrecen"; "En el primer caso

los cambios son proporcionales"; "En el primer caso aumenta en todos los intervalos, en el segundo caso la función decrece hasta 4 y luego crece"; "En el primer caso se mantiene en aumento. En el segundo disminuye el espacio recorrido, luego aumenta".

Con respecto a la pregunta en qué intervalo los cambios fueron más rápidos, el 55,4% respondió correctamente, prácticamente el 7% no responde y el resto responde de manera incorrecta. Las dificultades se presentaron para el segundo gráfico. Veinticuatro grupos dan como respuesta, los tres últimos intervalos.

Actividad. La posición de una piedra que es lanzada hacia arriba está dada por $s(t) = -2t^2 + 8t + 2$ metros, donde el tiempo t se mide en segundos. Complete la siguiente tabla. Realice la representación gráfica e interprete en la misma las medidas $t_2 - t_1$ y $s(t_2) - s(t_1)$.

Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$		
$1 \le t \le 2$		
$2 \le t \le 3$		
$3 \le t \le 4$		

¿Qué significado tienen los valores obtenidos en cada columna? Determine las unidades en las que se expresan los mismos. ¿Qué puede decir con respecto a la velocidad de la piedra en todo su trayecto? Estime la velocidad de la piedra a los 3 segundos de iniciado el movimiento.

La resolución de esta actividad requiere que el alumno traduzca del registro algebraico al numérico y gráfico además de interpretar lo realizado en el registro coloquial. Se presenta una función definida algebraicamente y se solicita la medición de los cambios y el análisis del comportamiento de los mismos. Con las respuestas, el docente puede indagar las concepciones de los alumnos sobre el movimiento variado.

De ochenta y tres trabajos que se obtuvieron en total, no se observaron dificultades mayores para completar la tabla, ya que aproximadamente lo hizo de manera correcta el 94%. Solamente cinco grupos cometen errores al evaluar s(t).

El 86% traza correctamente la gráfica y un sólo grupo no la hace. En los doce trabajos en los que la representación no es correcta, observamos que no coinciden los valores marcados con los de la tabla. En la mayoría de las representaciones el problema fue que empiezan y terminan la curva en $s = 0$.

Llama la atención que prácticamente el 56% de los grupos no mostró en la gráfica las medidas solicitadas. Esto nos muestra las dificultades que presentan para interpretar y relacionar lo realizado en la tabla con respecto a los cambios y la gráfica.

A la pregunta sobre qué significado tienen los valores obtenidos en cada columna, cinco grupos (6%) no responden. Sólo veintiún grupos (el 25% aproximadamente) responden correctamente, expresando que Δs representa el cambio de posición y $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ representa la velocidad de la piedra, aunque muchos no aclaran que se trata de la velocidad promedio en el intervalo correspondiente.

Algunas de las respuestas que no fueron consideradas correctas, aportan información sobre el movimiento de la piedra pero no solicitada en la pregunta. Algunas fueron: "La piedra sube hasta cierto punto y luego cae"; "La primer columna nos informa sobre el ascenso y descenso de la piedra y la segunda columna lo mismo pero en relación al tiempo"; "La variación de la posición va aumentando hasta cierto punto luego comienza a disminuir progresivamente. Aumenta en las dos primeras unidades y luego disminuye. No son constantes"; "La variación de posición no se mantiene constante por cada unidad de tiempo".

En relación a la pregunta sobre la velocidad de la piedra en todo su trayecto, pretendíamos simplemente que observen que la velocidad no es constante, respuesta detectada en el 21,7% de los trabajos. Cuatro grupos respondieron que la velocidad decrece hasta los dos segundos, cuando alcanza la altura máxima, y aumenta desde los dos segundos hasta los cuatro. No se encuentran referencias al hecho de que la velocidad es negativa, por lo que en realidad esta no aumenta, sino la rapidez.

Cinco grupos no respondieron a esta pregunta.

En las respuestas notamos confusión entre la posición de la piedra y la velocidad. Dieciocho grupos (21,7%) responden: "aumenta hasta dos segundos y a partir de ese instante comienza a disminuir". Otras respuestas fueron: "La piedra comienza a ascender hasta un punto máximo y luego desciende", "La velocidad va disminuyendo con el paso del tiempo", La velocidad con que fue lanzada fue la misma con la que cayó".

La última pregunta, referida a la velocidad del móvil a los tres segundos de iniciado el movimiento, la habíamos incluido para indagar sobre las concepciones de los alumnos acerca de la velocidad en un instante. Queríamos averiguar si eran capaces de calcular la velocidad en un intervalo pequeño como aproximación a lo pedido. Presentamos las repuestas más significativas por los porcentajes detectados.

En veinticinco trabajos (30,12%) los alumnos calcularon $\frac{8}{3}\frac{m}{seg} = 2{,}66\frac{m}{seg}$. *Observamos que dividen el valor que corresponde a la posición de la piedra en el instante* $t = 3$ *por el tiempo transcurrido hasta el instante pedido (3 segundos). Un sólo grupo de los mencionados considera que la velocidad es negativa. Otro grupo escribe el mismo valor pero con la unidad incorrecta* $\left(\frac{km}{seg}\right)$.

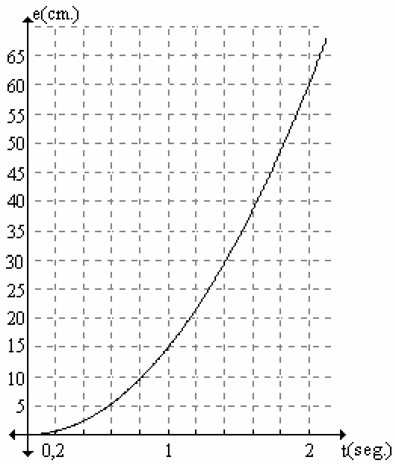
El 25,3% del total (veintiún grupos) calcula la velocidad promedio en el intervalo comprendido entre $t = 0$ *y* $t =$ *3 segundos. Realizan* $\frac{8-2}{3-0} = 2\frac{m}{seg}$ *, de los cuáles sólo uno la da con el signo negativo.*

Otros grupos (once, que corresponden al 13,25%) respondieron directamente $8\frac{m}{seg}$ *lo que resulta al dividir el valor de la posición de la piedra en* $t = 3$ *por un segundo.*

Siete grupos no respondieron la pregunta (8,43%) y sólo uno dio la respuesta correcta, que fue calculada a través del límite (el grupo estaba formado por alumnos recursantes a la asignatura).

Las demás respuestas fueron variadas pero ninguno intentó hacer una aproximación de la velocidad.

Actividad. En un experimento de laboratorio se estudió la caída libre de una bola de hierro pequeña. La gráfica muestra el espacio e recorrido por la bola (en centímetros) en función del tiempo t (en segundos).



a) Determine la velocidad promedio de la bola en el intervalo de 1 a 2 segundos.

b) Observe el gráfico y complete la tabla considerando los intervalos (1, 1 + Δt), teniendo en cuenta los valores de Δt que aparecen en la primer fila de la tabla.

Δt	0,8 seg.	0,6 seg.	0,4 seg.	0,2 seg.
Intervalo (1, 1 + Δt)				
Espacio recorrido				
Velocidad promedio				

c) En cada uno de los siguientes gráficos, calcule la pendiente de la recta que une los puntos A y B. Relacione los valores de las pendientes con los cálculos realizados en los incisos anteriores. Dibuje la recta.

Nota. Por razones de espacio los gráficos no se incluyen. En cada uno se presenta la misma gráfica de arriba y se representan los puntos A y B que son los que tienen como abscisa los extremos de los intervalos de los incisos a) y b).

d) ¿Cuál es aproximadamente la velocidad de la bola en el instante t = 1 segundo?

e) Dibuje la recta tangente a la gráfica en el punto **A**. ¿Qué relación existe entre la pendiente de esta recta y la velocidad pedida en **d)?**

Nota. El gráfico no se incluye. El punto A corresponde a la abscisa t = 1.

En esta actividad se relaciona el concepto de razón de cambio con su interpretación geométrica como pendiente de una recta. Esto ayuda a introducir este aspecto esencial en la construcción del concepto de derivada, que se presenta como un obstáculo para los alumnos y provoca numerosas dificultades.

Del total de trabajos (ochenta y tres), ocho grupos no respondieron esta actividad. Según lo observado por el docente presente en el aula, esto puede deberse en parte a que era la última actividad a responder y algunos no tuvieron tiempo para desarrollarla.

De las respuestas al primer inciso observamos que lo hicieron de manera correcta cincuenta y siete grupos (el 85,5 %). Tres grupos (4%) dan la respuesta pero la unidad usada es incorrecta. Además, en otros tres trabajos expresaron que en el intervalo dado la bola recorre 45 centímetros en un segundo, lo que muestra que tienen idea de velocidad pero no logran enunciarla correctamente.

En el inciso ***b)*** *debían completar la tabla. Con respecto a los intervalos fueron armados correctamente por sesenta y dos grupos (74,7%). Diez grupos, aproximadamente el 12%, no responden a esta consigna y el resto lo hace de manera incorrecta.*

En relación al espacio recorrido en el intervalo determinado anteriormente, catorce grupos no responden (16,9%) y dieciséis (19,3%) no lo hacen de manera correcta. En estos trabajos encontramos como errores más significativos que consideran como espacio recorrido la posición de la partícula en los instantes $t = 0{,}8$; $0{,}6$; $0{,}4$ y $0{,}2$ segundos o bien la posición en $t = 1{,}8$; $1{,}6$; $1{,}4$ y $1{,}2$ segundos.

En cuanto a la velocidad promedio, catorce grupos no responden (casi el 17%), cuatro lo hacen de manera incorrecta y el resto la calcula correctamente, aunque en algunos casos no obtienen la respuesta esperada ya que arrastran errores del inciso anterior.

En el siguiente ítem los alumnos debían dibujar las rectas secantes, calcular sus pendientes y relacionar los resultados con lo obtenido anteriormente. No respondieron a este inciso dieciséis grupos (19,3%). El cálculo de las pendientes fue incorrecto en catorce trabajos (prácticamente el 17%). En los demás trabajos (cuarenta y cinco), los resultados para las pendientes fueron correctos, considerando valores aproximados. Observamos que un gran número de grupos no percibe que son los mismos cálculos que para la última fila de la tabla y no trabaja con los mismos valores del inciso anterior. Es así que sólo diecisiete grupos (20,5%), expresan la relación entre las pendientes y las velocidades promedio, de las cuales trece respuestas fueron correctas.

Con respecto al dibujo de las rectas, la actividad es respondida por treinta y ocho grupos (45,8%). Veintisiete lo hacen correctamente y once dibujan el segmento que une los dos puntos.

Ningún grupo resuelve correctamente el inciso ***d)****. Veintisiete grupos no responden (32,5%) y el resto lo hace de manera incorrecta. De éstos, treinta (un poco más del 36%) señalan que la velocidad en ese instante es* $15 \frac{cm}{seg}$.

El valor 15 corresponde a la posición de la bola en $t = 1$ segundo. A pesar de que se presentó la tabla con intervalos de tiempo cada vez más pequeños, intentando hacerlos razonar sobre el proceso requerido para calcular la velocidad instantánea, no lograron llegar a una respuesta.

El dibujo de la recta tangente en el último inciso es realizado por veintisiete grupos (32,5%). Uno sólo la dibuja mal y los demás trabajos la grafican correctamente. En diez trabajos (12%), los alumnos expresan de manera aceptable la relación entre la pendiente de la recta tangente y la velocidad en un instante, en once lo hacen de manera incorrecta y el resto no responde a este apartado. Sin embargo ningún grupo expresa que el valor de la pendiente debe ser el mismo que el resultado obtenido en el inciso anterior. Los alumnos que expresan la relación habían cursado la materia el año anterior pero no son capaces de reconocerla y aplicarla a la situación.

Reflexiones

La formación de las nociones de variable, función y derivada se basan en el entendimiento de los procesos de cambio, fundamentales para el desarrollo de un pensamiento y lenguaje variacional. Un escaso desarrollo de los procesos de cambio impedirá lograr profundidad en las concepciones relativas al cálculo. Este desarrollo no se logra de manera instantánea, es necesaria una preparación adecuada.

El análisis de las dificultades en la resolución de las diferentes actividades nos permitió reflexionar sobre los procesos de enseñanza. En primer lugar resaltamos la importancia de analizar el tratamiento del tema funciones ya que muchos de los problemas están relacionados con este concepto.

Del análisis de las respuestas surgieron las dificultades que tienen los alumnos para relacionar de manera correcta los diferentes registros. Es necesario promover las tareas que conectan los distintos sistemas de representación ya que permiten acercar al alumno al concepto desde diferentes perspectivas, favoreciendo la visualización de las ideas, lo que los llevará a la aprehensión de los distintos conceptos.

Desde un punto de vista actitudinal, el trabajo realizado resultó interesante tanto para los alumnos como para los docentes. Creemos que la modalidad de trabajo los motivó a la búsqueda de sus propias estrategias de solución para resolver los problemas planteados. De esta manera logramos promover un aprendizaje más activo, junto con la posibilidad de ayudar a que aprendan mediante la construcción y la reflexión, alentando la discusión de distintas estrategias y soluciones, así como motivar explicaciones que llevan a comenzar procesos de argumentación y demostración.

Destacamos este tipo de propuesta que nos permite analizar las producciones de nuestros alumnos ya que sus respuestas nos proporcionan una idea clara de sus concepciones por lo que resulta primordial en nuestra tarea de acercarnos a comprender sus procesos de pensamiento. El análisis y valoración de los resultados de la experiencia será tenido en cuenta para la toma de decisiones en acciones futuras.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (editor). *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Una Empresa Docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Azcárate, C.; Bosch, D.; Casadevall, M.; Casellas, E. (1997). *Cálculo diferencial e integral.* España: Síntesis.

Cantoral, R. y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(3), 265-292.

Carabús, O. (2002). El Aprendizaje del Cálculo en la Universidad. La Conceptualización de la Derivada de una Función y sus Niveles de Comprensión. Producciones Científicas NOA. Sección: Educación y Sociedad. Catamarca. Obtenido en diciembre 13, 2006 de http://www.editorial.unca.edu.ar /NOA2002 / Aprendizaje%20Calculo%20Universidad.pdf (pp.1-11)

D´Amore, B. (2002). La complejidad de la noética en matemática como causa de la falta de devolución. *Revista TED de la Universidad Pedagógica de Bogotá. Colombia*, *11*, 63-71.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2007). La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. En Dolores, C.; Martínez, G.; Farfán, R.; Carrillo, C.; López, I. y Navarro, C. (Eds.). *Matemática*

Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula. (pp. 2-25). México: Ediciones Díaz de Santos.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica. Traducción de: Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Vol. 5 (1993).

Engler, A., Vrancken, S. y Müller, D. (2003a). La derivada: actividades que favorecen su comprensión. *Revista Novedades Educativas, 15* (146), 32-36.

Engler, A., Vrancken, S. y Müller, D. (2003b). Derivada y función derivada: su aporte en el estudio del comportamiento de la función. *Revista Novedades Educativas, 15* (153), 30-37.

Rico, L. (2001). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En Contreras, L...[et al.] (eds.). *Actas del* IV Simposio de la SEIEM (pp. 219 – 231). Huelva, España: Servicios de Publicaciones, Universidad de Huelva.